ĐỊNH LÝ ĐIỂM BẤT ĐỘNG CHO ÁNH XẠ CO SUY RỘNG TRONG KHÔNG GIAN *S*-MÊTRIC NÓN

Nguyễn Thị Ngân
Trường THPT Quỳ Hợp 3, xã Châu Quang, Quỳ Hợp, Nghệ An
Ngày nhận bài 04/5/2021, ngày nhận đăng 18/7/2021

Tóm tắt: Trong bài báo này, chúng tôi chứng minh một định lý về sự tồn tại và duy nhất điểm bất động cho một lớp ánh xạ co suy rộng trong không gian $S-$mêtric nón. Kết quả của chúng tôi là mở rộng thực sự của một số kết quả tương tự trong $[2], [5], [6]$.
Từ khóa: Điểm bất động; ánh xạ co suy rộng; không gian nón $S-$mêtric.

1. Mở đầu

Để mở rộng các kết quả về sự tồn tại điểm bất động của các ánh xạ co trong không gian mêtric, năm 2007, H. L. Guang và Z. Xian [3] đã đưa ra khái niệm không gian mêtric nón, còn Sedghi và các cộng sự [7] đã đưa ra khái niệm không gian D^*-mêtric và thiết lập một số kết quả về điểm bất động trong các không gian này. Sau đó, vào năm 2012, Sedghi và các cộng sự [5] đã mở rộng lớp không gian D^*-mêtric bằng cách đưa ra khái niệm không gian $S-$mêtric và chứng minh một số định lý về điểm bất động trong không gian $S-$mêtric đầy đủ. Đến năm 2017, Dhamodharan và Krishnakumar [2] đã giới thiệu khái niệm không gian $S-$mêtric nón và một vài kết quả về điểm bất động. Từ đó, vấn đề về sự tồn tại điểm bất động trong lớp không gian $S-$mêtric và $S-$mêtric nón đã được nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu và thu được nhiều kết quả (xem [2], [4], [5], [6]).

Trong bài báo này, chúng tôi chứng minh một định lý về sự tồn tại và duy nhất điểm bất động cho một lớp ánh xạ co suy rộng trong không gian $S-$mêtric nón. Kết qủa của chúng tôi là mở rộng thực sự của một số kết quả trong $[2], [5], [6]$.

Đầu tiên, chúng ta nhắc lại một số khái niệm và kết qủa về không gian $S-$mêtric nón.

1.1. Định nghĩa ([3]). Giả sử E là không gian Banach thực và P là tập con của E. P được gọi là *nón* nếu

(i) P đóng trong E, P khác rỗng và $P \neq \{0\}$;

(ii) $\alpha x + \beta y \in P$ với mọi $x, y \in P$ và với mọi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \geq 0, \beta \geq 0$;

(iii) $P \cap (-P) = \{0\}$.

Giả sử P là nón trong không gian Banach E. Ta xác định thứ tự bộ phận $\leq$ trên E tương ứng với P bởi

$$x \leq y \Leftrightarrow y - x \in P.$$

Ta viết $x < y$ nếu $x \leq y$ và $x \neq y$ và viết $x \ll y$ nếu $y - x \in\ intP$ ($intP$ là phần trong của P).

[1] Email: ngannguyen2994@gmail.com (N. T. Ngân)

Trong bài báo này, ta luôn giả thiết P là nón trong không gian Banach thực E và $\leq$ là quan hệ thứ tự bộ phận trên E tương ứng với P và $intP \neq \emptyset$.

Nón P được gọi là *nón chuẩn tắc* nếu tồn tại hằng số K sao cho với mọi $x, y \in E$ mà $0 \leq x \leq y$ ta có

$$||x|| \leq K.||y||.$$

Số dương K nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện vừa nêu được gọi là *hằng số chuẩn tắc* của P.

1.2. Bổ đề ([3]). *Giả sử P là nón trong không gian Banach thực E, a, b, c là các phần tử của E. Khi đó,*

(i) *Nếu* $a \leq b$ *và* $b \leq c$ *thì* $a \leq c$*;*

(ii) *Nếu* $a \leq b$ *và* $b \ll c$ *thì* $a \ll c$*;*

(iii) *Nếu* $a \leq b$ *thì* $\alpha a \leq \beta b$ *với mọi* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, 0 \leq \alpha \leq \beta$*;*

(iv) *Nếu* $a \ll b$ *thì* $\alpha a \ll \beta b$ *với mọi* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, 0 < \alpha \leq \beta$*;*

(v) *Nếu* $a \in P$ *và tồn tại* $\lambda \in [0, 1)$ *sao cho* $a \leq \lambda a$ *thì* $a = 0$*;*

(vi) *Nếu* $a \in P$ *và* $0 \leq a \ll c$ *với mọi* $c \in intP$ *thì* $a = 0$*;*

(vii) *Nếu* $\{x_n\}$ *là dãy trong P và* $\{x_n\}$ *hội tụ tới 0 thì mỗi* $c \in intP$ *tồn tại số tự nhiên* n_c *sao cho* $x_n \ll c$ *với mọi* $n \geq n_c$.

1.3. Định nghĩa ([3]). Giả sử X là tập khác rỗng và $d : X \times X \to E$. Hàm d được gọi là *mêtric nón* trên X nếu các điều kiện sau được thỏa mãn

(i) $d(x, y) \geq 0$ với mọi $x, y \in X$ và $d(x, y) = 0$ khi và chỉ khi $x = y$;

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ với mọi $x, y \in X$;

(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ với mọi $x, y, z \in X$ (bất đẳng thức tam giác).

Tập X cùng với một mêtric nón trên nó được gọi là *không gian mêtric nón* và được kí hiệu là (X, d) hoặc X.

Từ định nghĩa trên ta thấy khái niệm không gian mêtric nón tổng quát hơn khái niệm không gian mêtric, vì mỗi không gian mêtric là không gian mêtric nón trong trường hợp $E = \mathbb{R}$ và $P = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$.

1.4. Định nghĩa ([1]). a) Giả sử X là một tập khác rỗng, E là không gian Banach, P là nón trong E và hàm $D^* : X^3 \to E$ thỏa mãn các điều kiện sau với mọi $x, y, z, a \in X$.

(1) $D^*(x, y, z) \geq 0$;

(2) $D^*(x,y,z) = 0$ khi và chỉ khi $x = y = z$;

(3) $D^*(x,y,z) = D^*(z,x,y) = D^*(y,z,x) = D^*(x,z,y) = D^*(z,y,x) = D^*(y,x,z)$ (tính đối xứng);

(4) $D^*(x,y,z) \le D^*(x,y,a) + D^*(a,z,z)$ (bất đẳng thức tứ giác).
Khi đó, hàm D^* được gọi là D^*-*mêtric nón* trên X và cặp (X, D^*) được gọi là *không gian* D^*-*mêtric nón.*
b) Trong Định nghĩa a), nếu lấy $E = \mathbb{R}$ và $P = \{x \in \mathbb{R} | x \ge 0\}$ thì hàm D^* được gọi là D^*-*mêtric* trên X và cặp (X, D^*) được gọi là *không gian* D^*-*mêtric.*

Nhận xét.

a) Không gian D^*-mêtric là một trường hợp đặc biệt của không gian D^*-mêtric nón.

b) Giả sử (X, D^*) là không gian D^*-mêtric nón. Khi đó, với mọi $x, y \in X$, ta có $D^*(x,x,y) = D^*(x,y,y)$.

1.5. Định nghĩa ([5]). Cho X là tập khác rỗng. Hàm $S : X^3 \to \mathbb{R}$ được gọi là $S-$*mêtric* trên X nếu thỏa mãn các điều kiện sau với mọi $x, y, z, a \in X$

a) $S(x,y,z) \ge 0$,

b) $S(x,y,z) = 0$ khi và chỉ khi $x = y = z$,

c) $S(x,y,z) \le S(x,x,a) + S(y,y,a) + S(z,z,a)$.

Cặp (X, S) được gọi là *không gian S-mêtric.*

1.6. Định nghĩa ([2]). Giả sử P là nón trong không gian Banach thực E và X là tập hợp khác rỗng. Hàm $S : X \times X \times X \to E$ được gọi là $S-$*mêtric nón* trên X nếu thỏa mãn các điều kiện sau với mọi $x, y, z, a \in X$

a) $S(x,y,z) \ge 0$.

b) $S(x,y,z) = 0$ khi và chỉ khi $x = y = z$,

c) $S(x,y,z) \le S(x,x,a) + S(y,y,a) + S(z,z,a)$.

Tập X cùng với mêtric nón S trên X được gọi là *không gian S-mêtric nón* và được ký hiệu bởi (X, S).

1.7. Ví dụ. Giả sử (X, d) là không gian mêtric nón và $S : X \times X \times X \to E$ là hàm được cho bởi

$$S(x,y,z) = d(x,y) + d(y,z) + d(z,x) \qquad \forall x, y, z \in X.$$

Ta dễ dàng kiểm tra được S là $S-$mêtric nón trên X. Do đó (X, S) là không gian $S-$mêtric nón.

1.8. Nhận xét. a) Nếu (X, D^*) là không gian D^*-mêtric nón thì (X, D^*) cũng là không gian $S-$mêtric nón. Thật vậy, sử dụng điều kiện (3) và (4) trong Định nghĩa 1.4 ta có

$$\begin{aligned} D^*(x,y,z) &\le D^*(x,y,a) + D^*(a,z,z) \\ &\le D^*(x,a,a) + D^*(y,y,a) + D^*(z,z,a) \ \forall x, y, z, a \in X. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra D^*-mêtric cũng là một $S-$mêtric nón trên X.
b) Trong Định nghĩa 1.6, nếu lấy E là không gian các số thực R với chuẩn thông thường và nón $P = [0; +\infty)$ thì ta nhận được (X, S) là không gian $S-$mêtric. Nói cách khác, không gian $S-$mêtric là trường hợp đặc biệt của không gian $S-$mêtric nón.
1.9. Bổ đề ([2]). *Nếu (X, S) là không gian $S-$mêtric nón thì*

$$S(x, x, y) = S(y, y, x)\ \forall x, y, \in X.$$

1.10. Định nghĩa. Giả sử (X, S) là không gian $S-$mêtric nón.
a) Dãy $\{x_n\}$ trong X được gọi là *hội tụ* tới $x \in X$ và ký hiệu bởi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ hoặc $x_n \to x$ khi $n \to \infty$ nếu với mỗi $c \in intP$ tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho với mọi $n \geq n_0$ ta có $S(x_n, x_n, x) \ll c$.
b) Dãy $\{x_n\}$ trong X được gọi là *dãy Cauchy* nếu với mỗi $c \in intP$ tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho với mọi $n, m \geq n_0$ ta có $S(x_n, x_n, x_m) \ll c$. Điều này là tương đương với: Với mỗi $c \in intP$ tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho với mọi $n \geq n_0$ và với mọi $p = 0, 1, ...$ ta có $S(x_n, x_n, x_{n+p}) \ll c$.
c) Không gian $S-$mêtric (X, S) được gọi là *đầy đủ* nếu mọi dãy Cauchy trong nó đều hội tụ.
1.11. Bổ đề. *Nếu $\{x_n\}$ là một dãy hội tụ trong không gian mêtric nón (X, S) thì $\{x_n\}$ là dãy Cauchy và $\{x_n\}$ chỉ hội tụ tới một điểm duy nhất.*
Chứng minh. Giả sử $\{x_n\}$ hội tụ $x \in X$. Khi đó, với mỗi $c \in intP$ tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho với mỗi $n \geq n_0$ ta có

$$S(x_n, x_n, x) \ll \frac{c}{4}.$$

Do đó theo điều kiện c) trong Định nghĩa 1.6 với mọi n và $m \geq n_0$ ta có

$$\begin{aligned} S(x_n, x_n, x_m) &\leq 2S(x_n, x_n, x) + S(x_m, x_m, x) \\ &\ll \tfrac{c}{2} + \tfrac{c}{4} \ll c. \end{aligned}$$

Điều này chứng tỏ $\{x_n\}$ là dãy Cauchy.

Giả sử $\{x_n\}$ hội tụ tới hai điểm x và y. Khi đó, với mọi $c \in intP$ tồn tại hai số tự nhiên n_1 và n_2 sao cho với mọi $n \geq n_1$, ta có

$$S(x_n, x_n, x) \ll \frac{c}{4}$$

và với mọi $n \geq n_2$ ta có

$$S(x_n, x_n, y) \ll \frac{c}{4}.$$

Do đó, với mọi $n \geq \max\{n_1, n_2\}$ ta có

$$\begin{aligned} S(x, x, y) &\leq 2S(x, x, x_n) + S(y, y, x_n) \\ &= 2S(x_n, x_n, x) + S(x_n, x_n, y) \ll \tfrac{c}{2} + \tfrac{c}{4} \ll c. \end{aligned}$$

Kết hợp với Bổ đề 1.2. (vi), suy ra $S(x, x, y) = 0$. Do đó $x = y$.

□

1.12. Định nghĩa. Giả sử (X, S) là không gian $S-$mêtric nón. Hàm $f : X \to X$ được gọi là liên tục tại điểm $x \in X$ nếu $\{x_n\}$ là dãy bất kì trong X mà $x_n \to x$ khi $n \to \infty$ thì $f(x_n) \to f(x)$ khi $n \to \infty$.

2. Các kết quả chính

Giả sử (X, S) là không gian $S-$mêtric nón, $f : X \to X$. Với mỗi $(x, y) \in X \times X$ ta ký hiệu:

$$\begin{aligned} Q(x,y) = &a_1 S(x,x,y) + a_2 S(x,x,fx) + a_3 S(y,y,fy) + a_4 S(x,x,fy) \\ &+a_5 S(y,y,fx) + a_6 S(x,y,fx) + a_7 S(x,y,fy) \\ &+a_8 S(x,fx,fy) + a_9 S(y,fx,fy) \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} M(x,y) = \max\{ &S(x,x,y), 2S(x,x,fx) + S(y,y,fy), S(x,x,fy), \\ &S(y,y,fx), S(x,y,fx), S(x,y,fy), S(x,fx,fy), \\ &S(y,fx,fy)\}, \end{aligned}$$

trong đó, a_i là các hằng số không âm, $i = 1, 2, ..., 9$.

2.1. Định lý. *Giả sử (X, S) là không gian $S-$mêtric nón đầy đủ và $f : X \to X$. Khi đó, nếu tồn tại các hằng số không âm $a_1, a_2, ..., a_9$ và α thỏa mãn các điều kiện*

(i) $\max\{a_1+a_2+a_3+3a_4+a_6+2a_7+2a_8+a_9+3\alpha, a_1+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9+\alpha\} < 1$.

(ii) $S(fx, fx, fy) \le Q(x,y) + \alpha M(x,y), \forall (x,y) \in X \times X$

thì

a) f có duy nhất một điểm bất động $x \in X$ và $x = \lim\limits_{n\to\infty} f^n x_0$ với mọi $x_0 \in X$.

b) Với mọi $c \in intP$ và với mọi $n = 1, 2, ...$ ta có

$$S(f^n x_0, f^n x_0, x) \le \frac{2\lambda^n}{1-\lambda} S(x_0, x_0, fx_0) + c,$$

trong đó:

$$\lambda = \frac{a_1 + a_2 + 2a_4 + a_6 + a_7 + a_8 + 2\alpha}{1 - a_3 - a_4 - a_7 - a_8 - a_9 - \alpha};$$

c) f liên tục tại điểm bất động x.

Chứng minh. a) Lấy $x_0 \in X$. Đặt

$$x_{n+1} = fx_n = f^{n+1} x_0$$

và

$$r_n = S(x_n, x_n, x_{n+1}), \forall n = 0, 1, 2...$$

Sử dụng điều kiện (ii) và định nghĩa $S-$mêtric nón, với mọi n=1,2,... , ta có

$$\begin{aligned}
r_n &= S(x_n, x_n, x_{n+1}) = S(fx_{n-1}, fx_{n-1}, fx_n) \leq Q(x_{n-1}, x_n) + \alpha M(x_{n-1}, x_n)\\
&= a_1 S(x_{n-1}, x_{n-1}, x_n) + a_2 S(x_{n-1}, x_{n-1}, x_n) + a_3 S(x_n, x_n, x_{n+1})\\
&+ a_4 S(x_{n-1}, x_{n-1}, x_{n+1}) + a_5 S(x_n, x_n, x_n) + a_6 S(x_{n-1}, x_n, x_n)\\
&+ a_7 S(x_{n-1}, x_n, x_{n+1}) + a_8 S(x_{n-1}, x_n, x_{n+1}) + a_9 S(x_n, x_n, x_{n+1})\\
&+ \alpha \max\{S(x_{n-1}, x_{n-1}, x_n), 2S(x_{n-1}, x_{n-1}, x_n) + S(x_n, x_n, x_{n+1}),\\
&\quad S(x_{n-1}, x_{n-1}, x_{n+1}), S(x_{n-1}, x_n, x_{n+1}), S(x_{n-1}, x_n, x_{n+1}),\\
&\quad S(x_n, x_n, x_{n+1}), S(x_{n-1}, x_n, x_n)\}\\
&\leq (a_1 + a_2) r_{n-1} + (a_3 + a_9) r_n + a_4(2r_{n-1} + r_n) + a_6 r_{n-1}\\
&+ a_7(r_{n-1} + r_n) + a_8(r_{n-1} + r_n) + \alpha(2r_{n-1} + r_n)\\
&= (a_1 + a_2 + 2a_4 + a_6 + a_7 + a_8 + 2\alpha) r_{n-1} + (a_3 + a_9 + a_4 + a_7 + a_8 + \alpha) r_n.
\end{aligned}$$

Do đó ta có

$$r_n = \frac{a_1 + a_2 + 2a_4 + a_6 + a_7 + a_8 + 2\alpha}{1 - a_3 - a_4 - a_7 - a_8 - a_9 - \alpha} r_{n-1} = \lambda . r_{n-1}, \forall n = 1, 2, \ldots$$

Từ đó suy ra

$$r_n \leq \lambda r_{n-1} \leq \lambda^2 r_{n-2} \leq \ldots \leq \lambda^n r_0, \ \forall n = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

Từ điều kiện *(i)* suy ra $\lambda \in [0; 1)$. Với mọi $n = 1, 2, \ldots$ và với mọi $p = 0, 1, 2, \ldots$, sử dụng điều kiện c) trong định nghĩa $S-$mêtric nón và (1) ta có

$$\begin{aligned}
S(x_n, x_n, x_{n+p}) &\leq 2S(x_n, x_n, x_{n+1}) + S(x_{n+p}, x_{n+p}, x_{n+1})\\
&= 2S(x_n, x_n, x_{n+1}) + S(x_{n+1}, x_{n+1}, x_{n+p})\\
&\leq 2S(x_n, x_n, x_{n+1}) + 2S(x_{n+1}, x_{n+1}, x_{n+2}) + S(x_{n+2}, x_{n+2}, x_{n+p})\\
&\leq \ldots \leq 2(r_n + r_{n+1} + \ldots + r_{n+p-2}) + r_{n+p-1}\\
&\leq 2(\lambda^n + \lambda^{n+1} + \ldots + \lambda^{n+p-2}) r_0 + \lambda^{n+p-1} r_0\\
&\leq 2(\lambda^n + \lambda^{n+1} + \ldots + \lambda^{n+p-1}) r_0\\
&= 2\lambda^n \frac{1 - \lambda^p}{1 - \lambda} r_0 \leq 2\lambda^n \frac{r_0}{1 - \lambda}.
\end{aligned} \tag{2}$$

Vì $\lambda \in [0; 1)$ nên $2\lambda^n \dfrac{r_0}{1 - \lambda} \to 0$ khi $n \to \infty$. Do đó, theo Bổ đề 1.2 (vii) với mọi $c \in intP$ tồn tại số tự nhiên n_c sao cho

$$2\lambda^n \frac{r_0}{1 - \lambda} \ll c \quad \forall n \geq n_c.$$

Kết hợp với (2) suy ra với mọi $n \geq n_c$ và với mọi $p = 0, 1, \ldots$ ta có

$$S(x_n, x_n, x_{n+p}) \ll c.$$

Điều này chứng tỏ $\{x_n\}$ là dãy Cauchy. Vì (X, S) đầy đủ nên tồn tại $x \in X$ sao cho

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} fx_{n-1} = \lim_{n\to\infty} f^{n-1}x_0 = \lim_{n\to\infty} f^n x_0.$$

Tiếp theo, ta chứng minh x là điểm bất động của f. Sử dụng định nghĩa $S-$mêtric và điều kiện (ii) ta có

$$\begin{aligned}
S(x,x,fx) &\le 2S(x,x,x_{n+1}) + S(x_{n+1},x_{n+1},fx)\\
&= 2S(x,x,x_{n+1}) + S(fx_n,fx_n,fx)\\
&\le 2S(x,x,x_{n+1}) + Q(x_n,x) + \alpha M(x_n,x)\\
&= 2S(x,x,x_{n+1}) + a_1S(x_n,x_n,x) + a_2S(x_n,x_n,x_{n+1})\\
&+ a_3S(x,x,fx) + a_4S(x_n,x_n,fx) + a_5S(x,x,x_{n+1})\\
&+ a_6S(x_n,x,x_{n+1}) + a_7S(x_n,x,fx) + a_8S(x_n,x_{n+1},fx)\\
&+ a_9S(x,x_{n+1},fx) + \alpha\max\{S(x_n,x_n,x), 2S(x_n,x_n,x_{n+1})\\
&+ S(x,x,fx), S(x_n,x_n,fx), S(x,x,x_{n+1}), S(x_n,x,fx_n),\\
&S(x_n,x,fx), S(x_n,x_{n+1},fx), S(x,x_{n+1},fx)\}\\
&\le (2+a_5)S(x,x,x_{n+1}) + a_1S(x_n,x_n,x) + a_2S(x_n,x_n,x_{n+1}),\\
&+ a_3S(x,x,fx) + a_4\left[2S(x_n,x_n,x) + S(x,x,fx)\right]\\
&+ a_6\left[S(x_n,x_n,x) + S(x_{n+1},x_{n+1},x)\right] + a_7\left[S(x_n,x_n,x) + S(x,x,fx)\right]\\
&+ a_8\left[2S(x_n,x_n,x) + S(x_{n+1},x_{n+1},x) + S(x,x,fx)\right]\\
&+ a_9\left[S(x_{n+1},x_{n+1},x) + S(x,x,fx)\right]\\
&+ \alpha[2S(x_n,x_n,x) + 2S(x_n,x_n,x_{n+1}) + S(x,x,fx) + S(x,x,x_{n+1})]\ \forall n = 1,2,\dots
\end{aligned}$$

Từ đây suy ra

$$\begin{aligned}
(1-a_3-a_4-a_7-a_8-a_9-\alpha)S(x,x,fx) &\le (2+a_5+a_6+a_8+a_9+\alpha)S(x,x,x_{n+1})\\
&+ (a_1+2a_4+a_6+a_7+a_8+2\alpha)S(x_n,x_n,x)\\
&+ (a_2+2\alpha)S(x_n,x_n,x_{n+1})\ \forall n = 1,2,\dots \qquad (3)
\end{aligned}$$

Vì $x_n \to x$ nên với mọi $c \in intP$ tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho với mọi $n \ge n_0$, ta có

$$\begin{aligned}
&(2+a_5+a_6+a_8+a_9+\alpha)S(x,x,x_{n+1})\\
&\quad +(a_1+2a_4+a_6+a_7+a_8+2\alpha)S(x_n,x_n,x)\\
&\quad\quad +(a_2+2\alpha)S(x_n,x_n,x_{n+1}) \ll c.
\end{aligned}$$

Kết hợp với (3) ta có

$$(1-a_3-a_4-a_7-a_8-a_9-\alpha)S(x,x,fx) \ll c \tag{4}$$

với mọi $c \in intP$. Vì $a_3+a_4+a_7+a_8+a_9+\alpha < 1$ nên từ (4) và Bổ đề 1.2 ta có $S(x,x,fx) = 0$, tức $x = fx$. Như vậy x là điểm bất động của f.

Bây giờ, ta chứng minh x là điểm bất động duy nhất của f. Giả sử $y \in X$ cũng là một điểm bất động của f, tức là $y = fy$. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned}
S(x,x,y) = S(fx,fx,fy) &\le Q(x,y) + \alpha M(x,y) \\
&= a_1 S(x,x,y) + a_2 S(x,x,x) + a_3 S(y,y,y) \\
&+ a_4 S(x,x,y) + a_5 S(y,y,x) + a_6 S(x,y,x) \\
&+ a_7 S(x,y,y) + a_8 S(x,x,y) + a_9 S(y,x,y) \\
&+ \alpha \max\{S(x,x,y), S(x,y,y), S(x,y,x), S(y,x,y)\} \\
&\le (a_1 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9) S(x,x,y) + \alpha S(x,x,y) \\
&= (a_1 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + \alpha) S(x,x,y).
\end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện

$$a_1 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + \alpha < 1$$

suy ra $S(x,x,y) = 0$ tức $x = y$. Do đó, x là điểm bất động duy nhất của f.

b) Theo biểu thức (2), với mọi n và mọi p ta có

$$S(x_n, x_n, x_{n+p}) \le \frac{2\lambda^n}{1-\lambda} r_0.$$

Từ $x_n \to x$ khi $n \to \infty$ suy ra với mọi $c \in intP$ tồn tại số tự nhiên k_0 sao cho với mọi $p \ge k_0$ và mọi n ta có

$$S(x, x, x_{n+p}) \ll \frac{c}{2}.$$

Do đó với mọi $c \in intP$ và với mọi n ta có

$$\begin{aligned}
&S(f^n x_0, f^n x_0, x) = S(x_n, x_n, x) = S(x, x, x_n) \le 2S(x, x, x_{n+p}) \\
&+ S(x_n, x_n, x_{n+p}) \le c + \tfrac{2\lambda^n}{1-\lambda} r_0 = \tfrac{2\lambda^n}{1-\lambda} S(x_0, x_0, fx_0) + c.
\end{aligned}$$

c) Giả sử $x \in X$ là điểm bất động của f. Ta chứng minh f liên tục tại x. Giả sử $x_n \to x$ khi $n \to \infty$. Để chứng minh f liên tục tại x ta cần chứng tỏ $fx_n \to fx$ khi $n \to \infty$. Vì x là điểm bất động của f nên $x = fx$. Do đó, sử dụng điều kiện (ii) ta có

$$\begin{aligned}
S(fx, fx, fx_n) \quad &\le a_1 S(x, x, x_n) \\
&+ a_2 S(x, x, x) + a_3 S(x_n, x_n, fx_n) + a_4 S(x, x, fx_n) + a_5 S(x_n, x_n, x) \\
&+ a_6 S(x, x_n, x) + a_7 S(x, x_n, fx_n) + a_8 S(x, x, fx_n) + a_9 S(x_n, x, fx_n) \\
&+ \alpha \max \{S(x, x, x_n), 2S(x, x, x) + S(x_n, x_n, fx_n), S(x, x, fx_n) \\
&S(x_n, x_n, x), S(x, x_n, x), S(x, x_n, fx_n), S(x, x, fx_n), S(x_n, x, fx_n)\} \\
&\le a_1 S(x, x, x_n) + a_3 [2S(x_n, x_n, x) + S(x, x, fx_n)] + a_4 S(x, x, fx_n) \\
&+ a_5 S(x, x, x_n) + a_6 S(x, x, x_n) + a_7 [S(x_n, x_n, x) + S(x, x, fx_n)] \\
&+ a_8 S(x, x, fx_n) + a_9 [S(x_n, x_n, x) + S(x, x, fx_n)] \\
&+ \alpha [2S(x, x, x_n) + S(x, x, fx_n)] \\
&= (a_1 + 2a_3 + a_5 + a_6 + a_7 + a_9 + 2\alpha) S(x, x, x_n) \\
&+ (a_3 + a_4 + a_7 + a_8 + a_9 + \alpha) S(x, x, fx_n) \; \forall n = 1, 2, ...
\end{aligned}$$

Kết hợp với $a_3 + a_4 + a_7 + a_8 + a_9 + \alpha < 1$ suy ra

$$S(fx, fx, fx_n) \le \frac{a_1 + 2a_3 + a_5 + a_6 + a_7 + a_9 + 2\alpha}{1 - (a_3 + a_4 + a_7 + a_8 + a_9 + \alpha)} S(x, x, x_n)$$

với mọi n. Vì $x_n \to x$ khi $n \to \infty$ nên từ bất đẳng thức cuối cùng suy ra $fx_n \to fx$ khi $n \to \infty$. $\square$

2.2. Chú ý. Vì không gian $S-$mêtric là trường hợp đặc biệt của không gian $S-$mêtric nón (xem Nhận xét 1.8. b) nên Định lí 2.1 áp dụng được cho không gian $S-$mêtric đầy đủ. Mặt khác, nếu ta lấy E là không gian các số thực R với chuẩn thông thường và nón $P = [0; \infty)$ thì trong khẳng định b) của Định lý 2.1 cho $c \to 0$ ta được

$$S(f^n x_0, f^n x_0, x) \le \frac{2\lambda^n}{1-\lambda} S(x_0, x_0, fx_0) \ \ \forall n.$$

Do đó, trong Định lí 2.1, nếu lấy

$$a_1 = a \in [0; 1), \ \ \alpha = a_i = 0, i = 2, 3, ..., 9$$

thì ta nhận được hệ qủa sau.

2.3. Hệ quả ([5]). *Cho (X, S) là không gian $S-$mêtric đầy đủ và $f : X \to X$ là ánh xạ co, tức là tồn tại $a \in [0, 1)$ sao cho*

$$S(fx, fx, fy) \le aS(x, x, y) \qquad \forall x, y \in X.$$

Khi đó, f có duy nhất một điểm bất động x và với mỗi $x_0 \in X$ ta có $x = \lim_{n\to\infty} f^n x_0$ và

$$S(f^n x_0, f^n x_0, x) \le \frac{2a^n}{1-a} S(x_0, x_0, fx_0) \ \ \forall n.$$

2.4. Hệ quả ([6]) *Giả sử (X, S) là không gian $S-$mêtric đầy đủ và $f : X \to X$ là ánh xạ sao cho tồn tại các hằng số không âm $b_1, b_2, ..., b_5$ thỏa mãn*

$$\max\{b_1 + b_2 + 3b_4 + b_5, b_1 + b_3 + b_4, b_4 + 2b_5\} < 1$$

và

$$\begin{aligned} S(fx, fx, fy) \le\ & b_1 S(x, x, y) + b_2 S(x, x, fx) + \\ & b_3 S(y, y, fx) + b_4 S(x, x, fy) + b_5 S(y, y, fy) \end{aligned}$$

với mọi $x, y \in X$. Khi đó, f có một điểm bất động duy nhất trong X và f liên tục tại điểm bất động.

Chứng minh. Khẳng định cần chứng minh được suy ra từ việc sử dụng Định lí 2.1 với việc lấy (X, S) là không gian $S-$mêtric đầy đủ,

$$a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_5, a_4 = b_4, a_5 = b_3, \alpha = a_i = 0, i = 6, 7, 8, 9$$

$\square$

Trong Định lí 2.1, nếu lấy (X, S) là không gian $S-$mêtric đây đủ và

$$\alpha \in \left[0; \frac{1}{3}\right), a_i = 0, i = 1, ..., 9$$

thì ta nhận được hệ quả sau.

2.5. Hệ quả ([6]). *Giả sử (X, S) là không gian $S-$mêtric đầy đủ và $f : X \to X$ là ánh xạ sao cho tồn tại $\alpha \in [0; \frac{1}{3})$ thõa mãn*

$$S(fx, fx, fy) \leq \alpha \max\{S(x, x, y), S(x, x, fx), S(y, y, fy), \\ S(x, x, fy), S(y, y, fx)\}$$

với mọi $x, y \in X$. Khi đó, f có một điểm bất động duy nhất và f liên tục tại điểm bất động.

2.6. Hệ quả ([1], Định lí 2.2). *Giả sử (X, D^*) là không gian D^*-mêtric nón đầy đủ và $f : X \to X$. Khi đó, nếu tồn tại các số không âm a, b, c, d sao cho $a + b + c + d < 1$ và*

$$D^*(fx, fy, fz) \leq aD^*(x, y, z) + bD^*(x, fx, fx) + cD^*(y, fy, fy) + \mathrm{d}D^*(z, fz, fz)$$

với mọi $x, y, z \in X$ thì f có duy nhất một điểm bất động trong X.

Chứng minh. Từ giả thiết của hệ quả ta có

$$D^*(fx, fx, fy) \leq aD^*(x, x, y) + bD^*(x, fx, fx) \\ + cD^*(x, fx, fx) + dD^*(y, fy, fy) \ \ \forall x, y \in X$$

Vì không gian D^*-mêtric nón là trường hợp đặc biệt của không gian $S-$mêtric nón nên từ bất đẳng thức này suy ra khẳng định cần chứng minh nhận được từ việc áp dụng Định lý 2.1 với $a_1 = a; a_2 = b + c; a_3 = d, \alpha = a_i = 0, \quad i = 4, 5, ..., 9.$ □

2.7. Hệ quả ([8], Định lí 2). *Giả sử (X, D^*) là không gian D^*-mêtric đầy đủ và $f : X \to X$ là ánh xạ thỏa mãn*

$$D^*(fx, fy, fz) \leq a[D^*(x, y, z) + D^*(x, fx, fx) + D^*(y, fy, fz)], \forall x, y, z \in X, \quad (5)$$

trong đó a là hằng số dương nào đó thuộc $[0; \frac{1}{4})$. Khi đó, f có duy nhất một điểm bất động.

Chứng minh. Theo điều kiện (5), với mọi $x, y \in X$ ta có

$$D^*(fx, fx, fy) \leq a[D^*(x, x, y) + D^*(x, fx, fx) + D^*(x, fx, fy)]$$

Đặt $a_1 = a, a_2 = a, a_8 = a, a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = a_7 = a_9 = \alpha = 0$. Ta dễ dàng kiểm tra được các điều kiện của Định lý 2.1 được thỏa mãn. Do đó theo Định lý 2.1 thì f có điểm bất động duy nhất. □

2.8. Hệ quả ([8], Định lí 3). *Giả sử* (X, D^*) *là không gian* D^*-*mêtric đầy đủ và* $f : X \to X$ *là ánh xạ thỏa mãn*

$$\begin{aligned} D^*(fx, fy, fz) &\le aD^*(x, y, z) + \tfrac{b}{2}\left[D^*(x, fx, fy) + D^*(y, fy, fz)\right] \\ &+ \tfrac{c}{2}\left[D^*(x, y, fy) + D^*(y, z, fz)\right], x, y, z \in X, \end{aligned} \tag{6}$$

trong đó $a, b, c \ge 0$ *và* $a + \dfrac{3}{2}b + \dfrac{3}{2}c < 1$. *Khi đó,* f *có duy nhất một điểm bất động.*

Chứng minh. Từ điều kiện (6), ta có

$$\begin{aligned} D^*(fx, fx, fy) &\le aD^*(x, x, y) + \tfrac{b}{2}\left[D^*(x, fx, fx) + D^*(x, fx, fy)\right] \\ &+ \tfrac{c}{2}\left[D^*(x, x, fx) + D^*(x, y, fy)\right] \quad \forall x, y \in X, \end{aligned} \tag{7}$$

Đặt $a_1 = a, a_2 = \dfrac{b+c}{2}, a_7 = \dfrac{c}{2}, a_8 = \dfrac{b}{2}, a_3 = a_4 = a_6 = a_7 = a_9 = \alpha = 0$. Ta dễ dàng kiểm tra được các điều kiện của Định lý 2.1 được thỏa mãn. Do đó theo Định lý 2.1 thì f có duy nhất điểm bất động. □

2.9. Hệ quả ([2], Định lí 2.5). *Giả sử* (X, S) *là không gian* $S-$*mêtric nón đầy đủ với* P *là nón chuẩn tắc và* $f : X \to X$ *là ánh xạ sao cho tồn tại các hằng số không âm* $h_1, h_2, ..., h_6$ *thỏa mãn*

$$\max\{h_1 + h_2 + 3h_4 + h_5 + 3h_6, h_1 + h_3 + h_4 + h_6\} < 1$$

và

$$\begin{aligned} S(fx, fx, fy) \le\ & h_1 S(x, x, y) + h_2 S(fx, fx, x) + h_3 S(fx, fx, y) \\ & + h_4 S(fy, fy, x) + h_5 S(fy, fy, y) \\ & + h_6 \sup\{S(x, x, y), S(fx, fx, x), S(fy, fy, x) \\ & S(fx, fx, y), S(fy, fy, y)\} \quad \forall x, y \in X. \end{aligned} \tag{8}$$

Khi đó, f *có duy nhất một điểm bất động* $x \in X$ *và* $x = \lim\limits_{n\to\infty} f^n x_0$ *với mọi* $x_0 \in X$.

Chứng minh. Đặt

$$a_1 = h_1, a_2 = h_2, a_3 = h_5, a_4 = h_4, a_5 = h_3, a_5 = h_3, \alpha = h_6$$

$$h_7 = h_8 = h_9 = 0.$$

Ta có

$$\begin{aligned} &\max\{a_1 + a_2 + a_3 + 3a_4 + a_6 + 2a_7 + 2a_8 + a_9 + 3\alpha, \\ &\quad a_1 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + \alpha\} \\ &= \max\{h_1 + h_2 + h_5 + 3h_4 + 3h_6, \\ &\quad h_1 + h_4 + h_3 + h_6\} < 1 \end{aligned}$$

và (8) trở thành

$$S(fx, fx, fy) \le Q(x, y) + \alpha M(x, y) \ \forall x, y \in X.$$

Như vậy các điều kiện của Định lí 2.1 được thỏa mãn. Do đó điều phải chứng minh được suy ra từ Định lí 2.1 □

2.10. Chú ý. Định lý 2.5 trong [2] cần thêm giả thiết P là nón chuẩn tắc nhưng trong Định lí 2.1, không cần tới giả thiết này.

Ví dụ sau đây chứng tỏ Định lí 2.1 thực sự tổng quát hơn một vài kết quả trong [5] và [6] (tức là Hệ quả 2.3 và Hệ quả 2.5.

2.11. Ví dụ. Giả sử $X = \{1, 2, 3\}$. Ta xác định hàm $S : X^3 \to [0; +\infty)$ bởi

$$\begin{aligned}
&S(1,2,3) = 4, S(2,2,3) = 3\\
&S(1,1,2) = S(1,1,3) = 2\\
&S(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow x = y = z\\
&S(x,y,z) = S(y,z,x) = S(z,x,y) = ...
\end{aligned}$$

(S có tính đối xứng theo cả 3 biến).
Ta dễ dàng kiểm tra được (X, S) là không gian $S-$mêtric đầy đủ.
Ta xác định hàm $f : X \to X$ bởi

$$f1 = f2 = 1, f3 = 2.$$

Rõ ràng f có duy nhất một điểm bất động là 1.
Đầu tiên, ta chứng minh f thỏa mãn các điều kiện của Định lí 2.1 (tức Định lí 2.1 áp dụng được cho f). Thật vậy, lấy $a_6 = \dfrac{7}{9}, a_9 = \dfrac{1}{5}, a_i = 0$ với $i = 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8$ và $\alpha = 0$.
Ta thấy điều kiện (i) của Định lí 2.1 được thỏa mãn.
Ta có

$$S(f1, f1, f2) = S(f2, f2, f1) = 0.$$

nên điều kiện (ii) được thõa mãn với (1,2) và (2,1) $\in X \times X$.

Ta có

$$\begin{aligned}
&S(f1, f1, f3) = S(1,1,2) = 2,\\
&Q(1,3) = \tfrac{7}{9}S(1,3,1) + \tfrac{1}{5}S(3,1,2) = \tfrac{7}{9}.2 + \tfrac{1}{5}.4 > 2 = S(f1, f1, f3);\\
&S(f3, f3, f1) = S(2,2,1) = 3,\\
&Q(3,1) = \tfrac{7}{9}S(3,1,2) + \tfrac{1}{5}S(1,2,1) = \tfrac{7}{9}.4 + \tfrac{1}{5}.2 > 2 = S(f3, f3, f1);\\
&S(f2, f2, f3) = S(1,1,2) = 2,\\
&Q(2,3) = \tfrac{7}{9}S(2,3,1) + \tfrac{1}{5}S(3,1,2) = \tfrac{7}{9}.4 + \tfrac{1}{5}.4 > 2 = S(f2, f2, f3);\\
&S(f3, f3, f2) = S(2,2,1) = 2,\\
&Q(3,2) = \tfrac{7}{9}S(3,2,2) + \tfrac{1}{5}S(2,2,1) = \tfrac{7}{9}.3 + \tfrac{1}{5}.2 > 2 = S(f3, f3, f2).
\end{aligned}$$

Do đó điều kiện (ii) trong Định lí 2.1 được thõa mãn cho (1,3), (3,1), (2,3), (3,2) $\in X \times X$. Như vậy các điều kiện của Định lí 2.1 được thõa mãn.

Bây giờ, ta chứng minh Hệ quả 2.3 và Hệ quả 2.5 không áp dụng được cho f . Ta có

$$S(f1, f1, f3) = S(1,1,2) = 2 > aS(1,1,3) = 2a$$

với mọi $a \in [0, 1)$. Do đó điều kiện co trong Hệ quả 2.3 không đúng cho (1,3) $\in X \times X$. Như vậy Hệ quả 2.3 không áp dụng được cho f.
Nếu cặp $(1, 3)$ thỏa mãn điều kiện co trong Hệ quả 2.5 thì

$$\alpha \max\{S(1,1,3), S(1,1,1), S(3,3,2), S(1,1,2), S(3,3,1)\} = 3\alpha \geq 2 = S(f1, f1, f3).$$

Điều này mẫu thuẫn với $\alpha \in [0; \frac{1}{3})$. Do đó Hệ quả 2.5 không áp dụng được cho f.

$\square$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] C. T. Aage, J. N. Salunke, "Some fixed point theorems in generalized D^*-metric spaces," *Applied Sciences*, 12, 1-13, 2010.

[2] D. Dhamodharan and R. Krishnakumar, "Cone $S-$metric space and fixed point theorems contractive mappings," *Annals of Pure and Applied Mathematics*, Vol. 14, No. 2, 237-243, 2017.

[3] H. L. Guang, Z. Xian, "Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mapping," *J. Math. Anal. Appl.*, Vol. 332, No. 2, 1468-1476, 2007.

[4] G. S. Saluja, "Fixed point theorems on cone $S-$metric spaces using implicit relation," *CUBO, A Mathematical Jounal*, Vol. 22, No. 02, 273-289, 2020.

[5] S. Sedghi, N. Shobe, A. Aliouche, "A generalization of fixed point theorems in $S-$metric spaces," *Math. Vesik*, 64(3), 258-266, 2012.

[6] S. Sedghi, N. V. Dung, "Fixed point theorems on $S-$metric spaces," *Math. Vesik*, 66(1), 113-124, 2014.

[7] S. Sedghi, N. Shobe, H. Zhou, "A common fixed point theorem in D^*-metric spaces," *Fixed Point Theory Appl.*, Article ID 27906, 13 pages, 2007.

[8] T. Veerapandi and Aji. M. Pillai, "A common fixed point theorem and some fixed point theorems in D^*-metric spaces," *African Journal of Mathematics and Science Research*, Vol. 4(8), 273-280, 2011.

SUMMARY

FIXED POINT THERORￄEM FOR GENERALIZED CONTRACTIVE MAPPINGS IN CONE $S-$METRIC SPACES

Nguyen Thi Ngan
Quy Hop 3 Secondary School, Chau Quang, Quy Hop, Nghe An
Received on 04/5/2021, accepted for publication on 18/7/2021

In this paper, we establish the existence and uniqueness of fixed point for generalized contractive mappings in cone $S-$metric spaces. This results extend and generalize well-known results in [2], [5], [6].
Keywords: Fixed point; generalized contractive mapping; cone $S-$metric space.